Exemple de calcul de charge linéaire et surfacique:

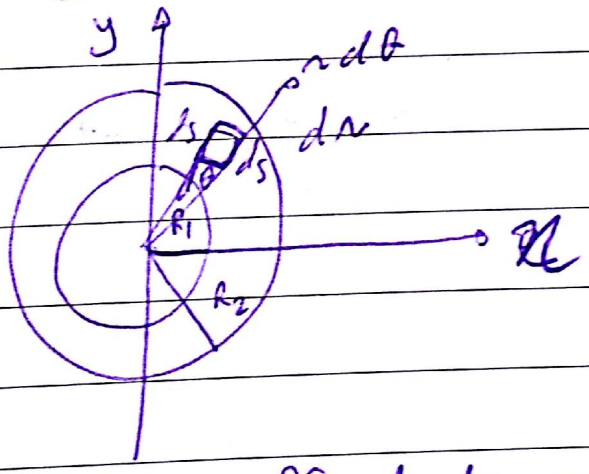
1 - Calculer la charge portée par le périmètre d'un cercle de rayon R portant une charge linéaire de charge uniforme λ:

2 - Calculer la charge d'une couronne circulaire de centre O de rayons intérieur R_1 et extérieur R_2 portant une densité surfacique de charge uniforme.

1 - $de = R\,d\theta$

$$q = \int_{Cercle} \lambda\, dl = \lambda \int_0^{2\pi} R\, d\theta = \lambda R 2\pi = \boxed{2\pi R \lambda}$$

2 -



$$q = \iint \sigma\, ds = \sigma \iint r\, dr\, d\theta = \sigma \int_{R_1}^{R_2} r\, dr \int_0^{2\pi} d\theta$$

$$= \sigma \left[\frac{R_2^2 - R_1^2}{2}\right] 2\pi = \left[\pi R_2^2 - \pi R_1^2\right]\sigma$$

ACCU-CHEK®

Scanned by CamScanner

Exemple de Calcul de la charge volumique et surfacique

1) Sphère (O, R) de densité volumique

$\rho(M) = \rho_0 r$. charge q ?

$$q = \int_V \rho(M)\, dV = \int_V \varepsilon_0\, r \times r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

$$= \varepsilon_0 \int_0^{\pi} r^3 dr \int_0^{\pi} \sin\theta\, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

$$= \varepsilon_0 \frac{R^4}{4} \times \underbrace{\left[-\cos\theta\right]_0^{\pi}}_{2} \times \left[2\pi\right] = \pi \varepsilon_0 R^4$$

$$dV = dr \times r\, d\theta \times r \sin\theta\, d\varphi$$
$$= r^2\, dr \sin\theta\, d\theta\, d\varphi$$

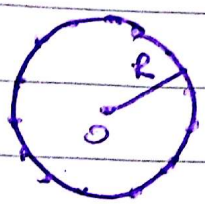
$$\rho(M) = \rho_0 \cdot \quad q = \rho_0 \int_0^R r^2\, dr \times 4\pi = \rho_0 \frac{R^3}{3} \times 4\pi$$

$$= \frac{4}{3} \pi R^3 \times \rho_0$$

Scanned by CamScanner

2) Sphère (O, R) de densité surfacique σ uniforme.

Calculer la charge q ?



sphère conductrice

$$q = \iint_S \sigma \, dS = \sigma \iint_S dS = \sigma R^2 \int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi$$

dv
$n \, d\theta$
$n \sin\theta \, d\varphi$

$R =$ de $\quad dS = R^2 \sin\theta \, d\theta \, d\varphi$

$$q = (4\pi R^2)\sigma$$

Scanned by CamScanner

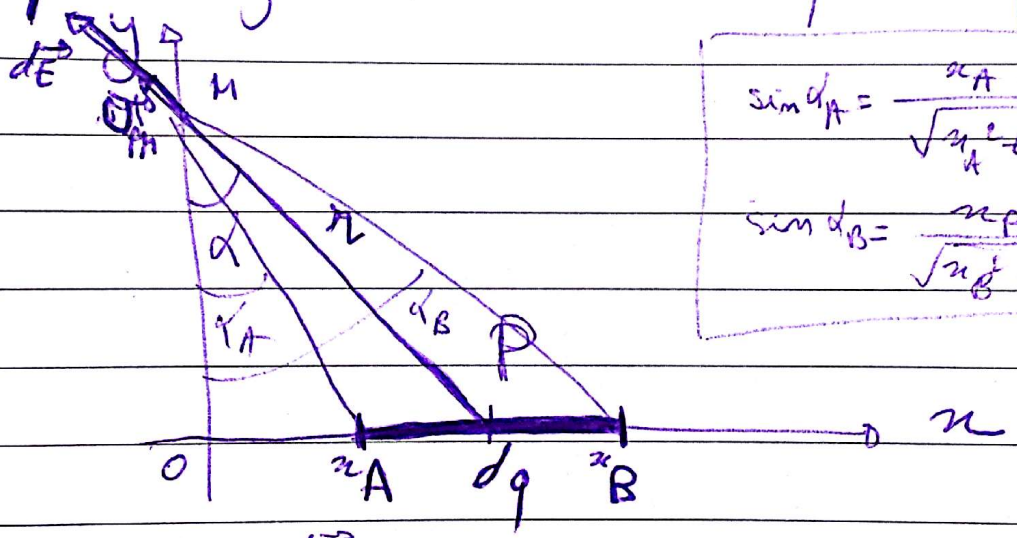
Electrostatique (cours)

Exo 1 :

Un fil rectiligne AB de longueur $2a$, porte une densité linéique de charge $\lambda > 0$.

a) Calculer le champ électrostatique créé par ce fil en tout point M de l'espace

La distribution de charge (AB) admet un plan de symétrie donc le champ $\vec{E}$ appartient à ce plan de symétrie. Donc $\vec{E}$ va dépendre que (x, y).



$$\sin\alpha_A = \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2 + y_A^2}}$$

$$\sin\alpha_B = \frac{x_B}{\sqrt{x_B^2 + y_B^2}}$$

$$d\vec{E}(M) = \frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r^3_{PM}} \vec{u}_{PM}$$

$$dq = \lambda\, dl = \lambda dx$$

$$\vec{u}_{PM} = \cos\alpha\, \vec{j} - \sin\alpha\, \vec{i}$$

Scanned by CamScanner

$$d\vec{E}(M) = \left(\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r_{PM}^3}\cos\alpha\,\vec{j}\right) + \left(\frac{dq}{4\pi\varepsilon_0 r_{PM}^3}(-\sin\alpha)\,\vec{i}\right)$$

$$= d\vec{E_y} + d\vec{E_x}$$

$$\cos\alpha = \frac{y}{r} \quad ; \quad tg\,\alpha = \frac{x}{y}$$

$$E_y = \int dE_y = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda\,dx}{r_{PM}^2}\cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dx}{r_{PM}^2}$$

$$x = y\,tg\alpha \Rightarrow dx = y\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}$$

$$r = \frac{y}{\cos\alpha}$$

$$E_y = \int dE_y = \int\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\lambda dx}{r_{PM}^2}\cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0}\int\frac{dx}{r_{PM}^2}\cos\alpha$$

$$E_y = \frac{\lambda y}{4\pi\varepsilon_0 y^2}\int\frac{d\alpha}{\cos^2\alpha}\times\cos^2\alpha\times\cos\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon y}\int_{\alpha_4}^{\alpha_3}\cos\alpha\,d\alpha$$

$$E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left[\sin\alpha_B - \sin\alpha_A\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y}\left[\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right]$$

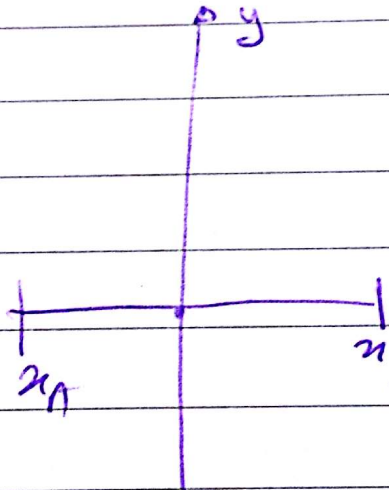
Scanned by CamScanner

$$E_x = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y} \int_{\alpha_A}^{\alpha_B} \sin\alpha \, d\alpha = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y} \left[\cos\alpha_B - \cos\alpha_A\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y} \times \left[\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right]$$

$$= \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0} \times \left[\frac{1}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \frac{1}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right]$$

$$E(M) = E_x \vec{i} + E_y \vec{j}$$



$x_B = -x_A$

$E_x = 0$ $\quad E_y = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y} \left[\frac{x_B}{\sqrt{x_B^2+y^2}} - \frac{x_A}{\sqrt{x_A^2+y^2}}\right] = \frac{\lambda}{4\pi\varepsilon_0 y} \frac{2x_B}{\sqrt{x_B^2+y^2}}$

$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y} \frac{2x_B}{|x_B|}$ (Règle de l'Hôpital)

$= \frac{\lambda}{2\pi\varepsilon_0 y}$

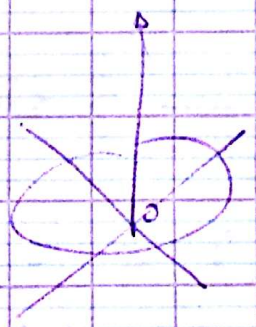
Scanned by CamScanner

Exemples de calcul du champ électrostatique.

1) Un fil rectiligne AB de longueur $2a$, porte une densité linéique de charge $\lambda > 0$.

a) Calculer le champ électrostati

2) Un disque, d'épaisseur infiniment petite, de rayon R, porte une charge uniforme de densité surfacique σ.
Calculer le champ en un point M de l'axe du disque



2) <u>Symétries</u> :

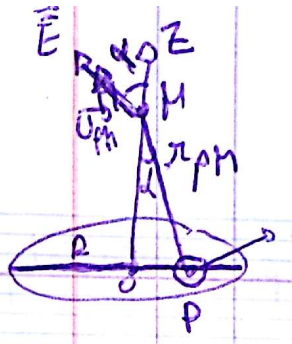
- plan contenant le disque est un plan de symétrie

- plan contenant l'axe Oz : plan de symétrie et tout plan coupant la distribution en 2.

$\Rightarrow$ <u>Oz axe de symétrie</u>

$\Rightarrow \vec{E}$ selon Oz

Scanned by CamScanner



$$d\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{dq}{r_{PM}^2}\vec{U}_{PM}$$

$$dq = \sigma\, dS$$

Coord. polaire: $\rho, \theta \rightarrow d\rho, \rho\, d\theta$

$$dS = \rho\, d\rho\, d\theta$$

$$r_{PM}^2 = z^2 + \rho^2$$

$$\cos\alpha = \frac{z}{(z^2+R^2)^{1/2}}$$

$$E = \iint \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\sigma\, dS}{r_{PM}^2}\cos\alpha$$

$$= \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{r_{PM}^2}\cos\alpha$$

$$= \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\iint \frac{\rho\, d\rho\, d\theta}{(z^2+\rho^2)^{3/2}} = \frac{\sigma z}{4\pi\varepsilon_0}\int_0^R \frac{\rho\, d\rho}{(z^2+\rho^2)^{3/2}}\int_0^{2\pi} d\theta$$

$$E = \frac{\sigma}{4\pi\varepsilon_0} z\, 2\pi \left[-(z^2+\rho^2)^{-1/2}\right]_0^R$$

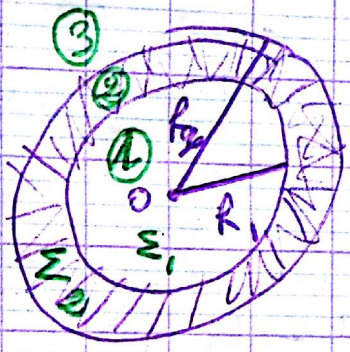
$$E(M) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{-1}{(z^2+R^2)^{1/2}} + \frac{1}{(z^2)^{1/2}}\right]$$

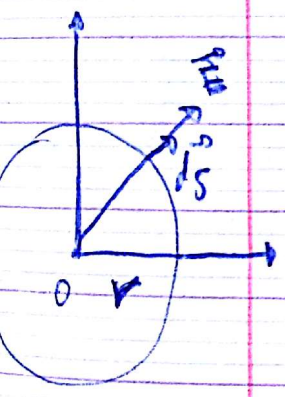
$$E(M) = \frac{\sigma z}{2\varepsilon_0}\left[\frac{1}{|z|} - \frac{1}{\sqrt{z^2+R^2}}\right]$$

Scanned by CamScanner

Calculer le champ créé par une distribution volumique de charge de densité positive et répartie entre 2 sphères concentriques de centre O et de rayons R_1 et R_2.

$(R_2 > R_1)$





Invariance par rotation φ et θ donc la distribution ne dépends que de r donc le champ est radiale. si je choisis une sphère de rayon r le champ sera suivant $E(r)$ et constant sur la surface de la sphère.

(surface de Gauss) Σ : sphère de rayon r.

$$\Phi = \iint_\Sigma \vec{E} \cdot \vec{dS} = \iint_\Sigma E\, dS = E \iint_\Sigma dS$$

$$\Phi = E \times 4\pi r^2$$

Scanned by CamScanner

① $r < R_1$

$$\phi = \frac{\Sigma q_{int}}{\varepsilon_0} = E \times 4\pi \times r^2 \Rightarrow E = 0 \text{ ou } q_{int} = 0$$

② $R_1 < r < R_2$: $\Sigma q_{int} = \iiint_V \rho \, dV = \rho \int_{R_1}^{r} r^2 dr \underbrace{\int_0^{\pi} \sin\theta \, d\theta \int_0^{2\pi} d\varphi}_{4\pi}$

$$\Sigma q_{int} = \frac{\rho}{3}\left[r^3 - R_1^3\right] \times 4\pi$$

$$\phi = 4\pi r^2 \times E = 4\pi \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[r^3 - R_1^3\right]$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0}\left[\frac{r^3 + R_1^3}{r^2}\right]$$

③ $r > R_2$

$$\Sigma q_{int} = \rho \int_{R_1}^{R_2} r^2 dr \times 4\pi$$

$$= \rho/3 \left[R_2^3 - R_1^3\right] \times 4\pi$$

$$E = \frac{\rho}{3\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{R_2^3 - R_1^3}{r^2}\right) \vec{e_r}$$

Scanned by CamScanner